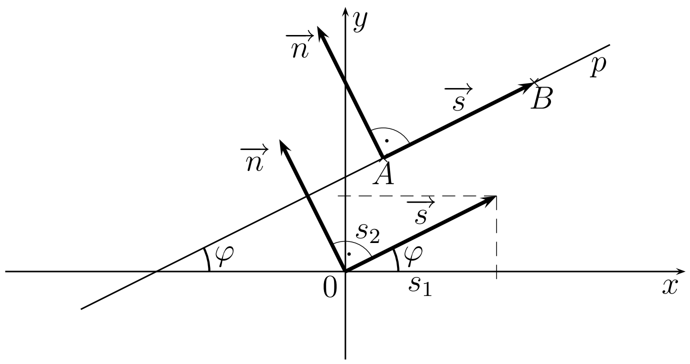
7. Analytická geometrie

A. Přímka v rovině



$\overrightarrow{s} = (s_1, s_2) \cdots$ směrový vektor přímky p
$\overrightarrow{n} \cdots$ normálový vektor přímky p
$\varphi \cdots$ směrový úhel přímky p
$k = \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{s_2}{s_1} \cdots$ směrnice přímky$p$

Definice 7.1. Přímka v rovině je množina bodů o souřadnicích $[x, y]$ daná jedním z následujících způsobů:

1)
$$p = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax + by + c = 0,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\},$$
kde alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly.

2)
$$p = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = a_1 + s_1 t,\ \ y = a_2 + s_2 t,\ \ t \in \mathbb{R}\},$$
kde $A = [a_1, a_2]$ je bod, kterým přímka prochází a $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2)$ je její směrový vektor.

3)
$$p = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = kx + q,\ \ k, q \in \mathbb{R}\}$$

4)
$$p = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\},$$
kde p, q jsou úseky, které přímka vytíná na osách x, y.

V prvním případě je přímka zadána pomocí své *obecné rovnice*, v druhém pomocí *parametrických rovnic*, ve třetím se jedná o *směrnicový tvar rovnice přímky* a ve čtvrtém o *úsekový tvar*.

Poznámka 7.2. Vlastnosti koeficientů obecné rovnice.

1) Koeficienty a, b určují souřadnice normálového vektoru $\overrightarrow{n} = (a, b)$ a tím i souřadnice směrového vektoru $\overrightarrow{s} = (-b, a)$.
2) Pokud $a = 0$, je přímka rovnoběžná s osou x.
3) Pokud $b = 0$, je přímka rovnoběžná s osou y.
4) Pokud $c = 0$, přímka prochází počátkem souřadné soustavy.

Poznámka 7.3. Vlastnosti směrnicového tvaru rovnice přímky.
Tento tvar nezahrnuje přímky rovnoběžné s osou y, neboť koeficient u y není nikdy roven 0. Navíc tento způsob zadání odpovídá zadání lineární funkce, jejímž grafem nemůže být přímka rovnoběžná s osou y. Koeficient k se nazývá *směrnice přímky*, více o směrnicích viz. kapitola Derivace funkce. Koeficient q je úsek, který přímka vytíná na ose y.

Věta 7.4. Vzdálenost bodu od přímky v rovině. Mějme přímku $p:\ ax+by+c=0$ a bod $A=[a_1,a_2]$, který na ní neleží. Pak vzdálenost v bodu A od přímky p je dána vztahem

$$v=\frac{|a\cdot a_1+b\cdot a_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

.

Definice 7.5. *Odchylkou dvou různoběžných přímek* rozumíme úhel, který je dán

a) jako ostrý úhel, který svírají směrové vektory těchto přímek,

b) jako rozdíl přímého úhlu (π) a tupého úhlu, který svírají směrové vektory těchto přímek.

Věta 7.6. Odchylka dvou přímek. Jsou-li $\overrightarrow{s_a},\overrightarrow{s_b}$ směrové vektory přímek a,b, potom pro odchylku φ těchto dvou přímek platí

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{s_a}\cdot\overrightarrow{s_b}|}{|\overrightarrow{s_a}|\cdot|\overrightarrow{s_b}|},$$

kde $\cdot$ v čitateli je skalární součin vektorů.

Definice 7.7. Vzájemná poloha přímek v rovině. Mějme přímky p,q dané obecnými rovnicemi $p:\ a_1x+b_1y+c_1=0,\ q:\ a_2x+b_2y+c_2=0$. Pak tyto přímky mohou být

a) *rovnoběžky splývající*, jestliže existuje $r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takové, že platí

$$a_1=ra_2\wedge b_1=rb_2\wedge c_1=rc_2.$$

(jedna rovnice je násobkem druhé)

b) *rovnoběžky různé*, jestliže existuje $r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takové, že platí

$$a_1=ra_2\wedge b_1=rb_2\wedge c_1\neq rc_2.$$

(normálové resp. směrové vektory jsou lineárně závislé, ale přímky nemají společný bod)

c) *různoběžky kolmé*, jestliže

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

(skalární součin normálových resp. směrových vektorů je roven 0)

d) *různoběžky* (nekolmé), jestliže neplatí ani jedna z předchozích možností.

B. Rovina v prostoru

Rovina v prostoru je jednoznačně určena:

- třemi různými body, které neleží na jedné přímce,
- dvěma různoběžnými přímkami, tj, přímkami, které mají společný právě jeden bod a jejichž směrové vektory jsou lineárně nezávislé,
- dvěma různými rovnoběžnými přímkami,
- bodem a přímkou, která daným bodem neprochází.

Následující definice obsahuje i analytické vyjádření roviny v prostoru.

Definice 7.8. Rovina v prostoru je množina bodů o souřadnicích $[x, y, z]$ daná jedním z následujících způsobů:

1)
$$\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$
kde alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly.

2)
$$\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = a_1 + s_1p + r_1q,\ y = a_2 + s_2p + r_2q,\ z = a_3 + s_3p + r_3q,\ p, q \in \mathbb{R}\},$$
kde $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod, který leží v zadané rovině a $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$ a $\overrightarrow{r} = (r_1, r_2, r_3)$ jsou její směrové vektory.

V prvním případě řekneme, že rovina je zadaná pomocí *obecné rovnice*, ve druhém pomocí *parametrických rovnic*.

Poznámka 7.9. Z parametrických rovnic dostaneme obecnou rovnici vyloučením parametrů, tj. sčítáním vhodných násobků parametrických rovnic. Z obecné rovnice přejdeme k parametrickým snadno volbou dvou proměnných jako parametrů (např. $y = p,\ z = q$) a dopočítáním třetí proměnné.

Poznámka 7.10. Vlastnosti koeficientů obecné rovnice roviny.

1) Koeficienty a, b, c určují souřadnice normálového vektoru $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. Pozor: narozdíl od přímky, normálový vektor k rovině nemůže jednoznačně určit směrový vektor roviny, neboť rovina má směrové vektory dva!

2) Pokud $a = 0$, je rovina rovnoběžná se souřadnou osou x.

3) Pokud $b = 0$, je rovina rovnoběžná s osou y.

3) Pokud $c = 0$, je rovina rovnoběžná s osou z.

4) Pokud $d = 0$, rovina prochází počátkem souřadné soustavy.

5) Pokud jsou dva koeficienty z trojice a, b, c rovny nule, je daná rovina rovnoběžná se souřadnou rovinou určenou osami s nulovými koeficienty, tedy například je-li $a = b = 0$, je daná rovina rovnoběžná s rovinou xy.

Definice 7.11. *Odchylkou dvou různoběžných rovin* rozumíme úhel, který je dán

a) jako ostrý úhel, který svírají normálové vektory těchto rovin,

b) jako rozdíl přímého úhlu (π) a tupého úhlu, který svírají normálové vektory těchto rovin.

Věta 7.12. Odchylka dvou rovin. Jsou-li $\overrightarrow{n_\sigma}, \overrightarrow{n_\rho}$ normálové vektory rovin σ, ρ, potom pro odchylku φ těchto dvou rovin platí
$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_\sigma} \cdot \overrightarrow{n_\rho}|}{|\overrightarrow{n_\sigma}| \cdot |\overrightarrow{n_\rho}|},$$
kde $\cdot$ v čitateli je skalární součin vektorů.

Poznámka 7.13. Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru je analogická vzájemným polohám přímek v rovině.

C. Přímka v prostoru

Definice 7.14. Přímka v prostoru je množina bodů o souřadnicích $[x, y, z]$ daná jedním z následujících způsobů:

1)
$$p = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = a_1 + s_1 t,\ y = a_2 + s_2 t,\ z = a_3 + s_3 t,\ t \in \mathbb{R}\},$$
kde $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod, který leží na zadané přímce a $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je její směrový vektor.

2)
$$p = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}\},$$
kde $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod, který leží na zadané přímce a $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je její směrový vektor.

V prvním případě se jedná o *parametrické rovnice přímky v prostoru*, druhý případ se nazývá *kanonický tvar rovnice přímky.*

Poznámka 7.15. Přímku v prostoru lze zadat i jako průsečnici dvou různoběžných rovin $p:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a $q:\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, tj, jako řešení systému dvou obecných rovnic rovin o třech neznámých:
$$p = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \}.$$
Tento tvar se někdy nazývá *obecná rovnice přímky v prostoru.*

Poznámka 7.16. Z kanonických rovnic dostaneme parametrické rovnice snadno tak, že položíme každý z výrazů roven parametru a vypočítáme proměnnou, opačně z každé parametrické rovnice spočítáme parametr, vzniklé výrazy se pak musí rovnat.

Poznámka 7.17. Odchylka dvou přímek v prostoru je definována a spočítá se stejně jako odchylka přímek v rovině

Narozdíl od rovinné situace, v prostoru máme ještě jednu možnou vzájemnou polohu dvou přímek.

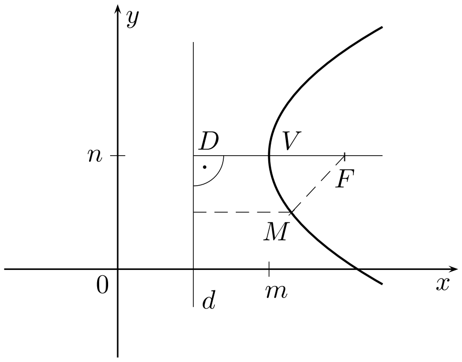
Definice 7.18. Dvě přímky v prostoru jsou

- *rovnoběžné splývající*, jestliže mají lineárně závislé směrové vektory a nekonečně mnoho společných bodů,
- *rovnoběžné*, jestliže mají lineárně závislé směrové vektory a žádný společný bod,
- *různoběžné*, jestliže mají lineárně nezávislé směrové vektory a právě jeden společný bod. Je-li navíc skalární součin směrových vektorů roven nule, jsou přímky jimi určené na sebe *kolmé.*
- *mimoběžné*, jestliže mají lineárně nezávislé směrové vektory a žádný společný bod.

D. Kuželosečky

1. Parabola

Definice 7.19. *Parabolou* nazýváme množinu takových bodů $[x, y]$ v rovině, které jsou stejně vzdáleny od pevného bodu F (*ohniska*) a pevné přímky d (*řídící přímka*).

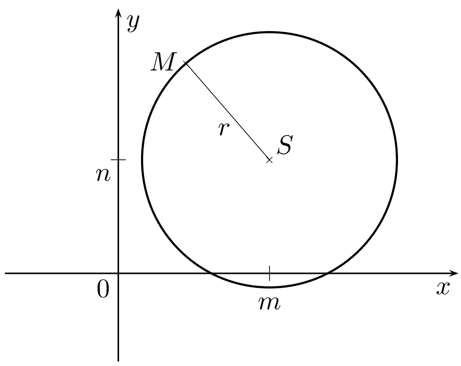


F $\cdots$ ohnisko paraboly
d $\cdots$ řídící přímka paraboly
V $= [m, n] \cdots$ vrchol paraboly
$|VF|$ $= |VD| = \dfrac{p}{2}$, p je parametr paraboly
M $\cdots$ libovolný bod na parabole

Definice 7.20. Je-li parabola zadána rovnicí
$y^2 + Ax + By + C = 0,\ ,\ A, B, C \in \mathbb{R},\ A \neq 0$, je-li osa paraboly rovnoběžná s osou x nebo
$x^2 + Ax + By + C = 0,\ ,\ A, B, C \in \mathbb{R},\ B \neq 0$, je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y, pak tuto rovnici nazveme *obecnou rovnicí paraboly.*

Definice 7.21. Je-li dána parabola s vrcholem $V = [m, n]$, pak její *vrcholová rovnice* je dána:
$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m)$, je-li osa paraboly rovnoběžná s osou x;
$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n)$, je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y.

2. Kružnice



S $= [m, n] \cdots$ střed kružnice
r $\cdots$ poloměr kružnice
M $\cdots$ libovolný bod na kružnici

Definice 7.22. *Kružnicí* nazýváme množinu takových bodů v rovině o souřadnicích $[x, y]$, které jsou od pevného bodu (středu) stejně vzdáleny.

Definice 7.23. Je-li kružnice zadána rovnicí

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,\ \ A, B, C \in \mathbb{R},$$

pak se tato rovnice nazývá *obecná rovnice kružnice.*

Definice 7.24. *Středová rovnice kružnice* je tvaru

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

kde $S = [m, n]$ je střed kružnice a r je její poloměr.

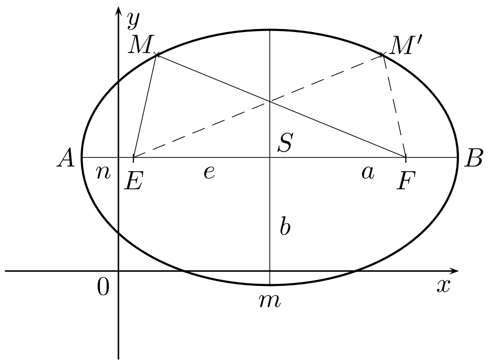
Definice 7.25. Parametrické rovnice kružnice jsou:

$$\begin{aligned} x &= m + r\cos t, \\ y &= n + r\sin t, \end{aligned}$$

kde bod $S = [m, n]$ je střed, r je poloměr, x, y jsou souřadnice libovolného bodu na kružnici a $t \in \mathbb{R}$ je parametr.

Poznámka 7.26. Parametr t v parametrických rovnicích kružnice udává úhel, který svírá úsečka SM a kladný směr osy x, M je libovolný bod na kružnici. Pro jednoznačně danou kružnici je tedy $0 \le t \le 2\pi$.

3. Elipsa



E, F ⋯ ohniska elipsy
S $= [m, n]$ ⋯ střed elipsy
a, b ⋯ hlavní a vedlejší poloosa elipsy
M ⋯ libovolný bod na elipse
e $= \sqrt{a^2 - b^2}$ ⋯ excentricita elipsy

Definice 7.27. *Elipsou* nazýváme množinu takových bodů v rovině o souřadnicích $[x, y]$, jejichž součet vzdáleností od dvou pevných bodů E, F (ohnisek) je roven konstantě $2a$ je-li $a > b$ nebo $2b$ je-li $b > a$.

Definice 7.28. Je-li elipsa zadána rovnicí

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \ A, B, C, D, E \in \mathbb{R}, \ A > 0, \ B > 0, \ A \neq B,$$

pak se tato rovnice nazývá *obecná rovnice elipsy.*

Definice 7.29. *Středová rovnice elipsy* je tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

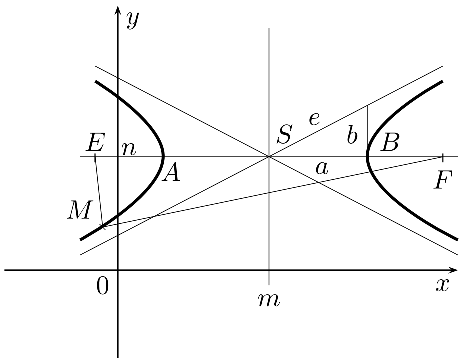
kde $S = [m, n]$ je střed elipsy a a, b jsou délky jejích poloos.

Definice 7.30. Parametrické rovnice elipsy jsou:

$$\begin{aligned} x &= m + a\cos t, \\ y &= n + b\sin t, \end{aligned}$$

kde bod $S = [m, n]$ je střed, a, b jsou délky poloos, x, y jsou souřadnice libovolného bodu na elipse a $t \in \mathbb{R}$ je parametr.

4. Hyperbola



E, F $\cdots$ ohniska hyperboly

S $= [m, n] \cdots$ střed hyperboly

a, b $\cdots$ hlavní a vedlejší poloosa hyperboly

M $\cdots$ libovolný bod na hyperbole

e $= \sqrt{a^2 + b^2}$ $\cdots$ excentricita hyperboly

Definice 7.31. *Hyperbolou* nazýváme množinu takových bodů v rovině o souřadnicích $[x, y]$, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou pevných bodů E, F (ohnisek) je v absolutní hodnotě roven konstantě $2a$.

Definice 7.32. Je-li hyperbola zadána rovnicí

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0,\ A, B, C, D, E \in \mathbb{R},\ A > 0,\ B > 0,\ \text{je-li hlavní osa rovnoběžná s osou } x,$$

$$-Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,\ A, B, C, D, E \in \mathbb{R},\ A > 0,\ B > 0,\ \text{je-li hlavní osa rovnoběžná s osou } y,$$

pak se tato rovnice nazývá *obecná rovnice hyperboly.*

Definice 7.33. *Středová rovnice hyperboly* je tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,\ \text{je-li hlavní osa rovnoběžná s osou } x,$$

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,\ \text{je-li hlavní osa rovnoběžná s osou } y,$$

kde $S = [m, n]$ je střed elipsy a a, b jsou délky jejích poloos.